Om ekvivalensrelasjoner og partisjoner

Morten Rognes

2008

(Arbeidsutkast)

§1 Innledning[1]

En ekvivalensrelasjon over en mengde X deler denne mengden inn i en mengde med ikke-tomme ekvivalensmengder som innbyrdes er disjunkte og som samlet uttømmer X. Det siste innebærer at unionen av alle disse ekvivalensmengdene er identisk med med mengden X. Med en partisjon av en mengde X forstår forstår vi en mengde av delmengder av X der alle delmengdene er ikke-tomme og hvor to distinkte delmengder ikke har noen felles elementer. Dessuten kreves det at unionen av alle disse delmengdene av X er identisk med X. Man ser lett at systemet av ekvivalensmengder som bestemmes av en ekvivalensrelasjon er en partisjon av X i denne betydning. Det omvendte holder også. Er P en partisjon av X er det lett å definere en naturlig ekvivalensrelasjon assosiert med P: To elementer i X er ekvivalente hvis og bare hvis det finnes en mengde a i partisjonen P som de begge er med i. Det systemet av ekvivalensmengder som denne ekvivalensrelasjonen gir opphav til er, noe man innser ved litt ettertanke, identisk med partisjonen P.

Teorien om ekvivalensrelasjoner og partisjoner i den betydning som er angitt ovenfor har en viss betydning for teorien om presise dekriptive utsagn. La oss i det følgende betegne mengden av mulige verdener med I. Da vi enhver delmengde x av I representere et utsagn, nemlig det utsagnet som er sant i nøyaktig de og bare de verdenene som inngår i x. En partisjon av I inndeler nå I i et system av ikke-tomme innbyrdes disjunkte delmengder som samlet uttømmer I. Dette innebærer at en partisjon P av I representerer et system av konsistente, men innbyrdes logisk uforenelige utsagn hvor disjunksjonen av dem alle er det "tautologiske utsagn", det vil si det utsagn som er sant i enhver mulig verden. Ser man på mengden av alle mulige disjunksjoner, endelige såvel som uendelige, av de diverse utsagn som er elementer i P representerer disse en omfattende mengde med utsagn. Vi skal kalle denne utsagnsmengden for utsagnsmengden assosiert med, eller bestemt av, partisjonen P. Vi betegner den med "U(P)".

En partisjon P av en mengde X er en inndeling av X i underklasser. Hvis noen av disse underklassene inndeles ytterligere får man en finere inndeling av mengden X. Har man to partisjoner av X sies den første å representere enn ytterligere, eller finere, oppdeling av den andre hvis ethvert element i den første er inkludert i et eller annet element i den andre. Har man to partisjoner P og P' av X og P representerer en finere inndeling av P' sies P å være en genuint finere inndeling av P' dersom, og bare dersom, P' inneholder en mengde x og minst to elementer fra P er inkludert i denne mengden x. Representerer P en finere inndeling av P', der P og P' er partisjoner av mengden X, kan man vise at utsagnsmengden bestemt av P' er inkludert i utsagnsmengden bestemt av P. Er enn mer p en genuint finere inndeling av P' kan man ikke bare konkludere med at utsagnsmengden bestemt av P' er inkludert i utsagnsmengden bestemt av P, men også at den er strengt inkludert i utsagnsmengden bestemt av P.

Nåvel. En ekvivalensrelasjon over I vil bestemme en partisjon av I, nemlig mengden av kvivalensmengder bestemt av ekvivalensrelasjonen. Har man nå for seg to ekvivalensrelasjoner over I der den første der den første er strengt inkludert i den andre kan man vise at den partisjonen som er bestemt av den førtse representerer en genuint finere inndeling av I enn den partisjonen som er bestemt av den andre ekvivalensrelasjonen.

---

1 Dette skrift er et supplement til Rognes [1]. Egentlig var det meningen å bruke dette stoffet i det nevnte arbeid, men etter hvert este det hele såpass mye opp at jeg fant det best å samle de resultatene jeg gjør rede for her i et eget arbeid.

Tilsvarende vil mengden av utsagn som er bestemt av ekvivalensklassene assosiert med den første ekvivalensrelasjonen strengt inkludere mengden av utsagn bestemt av ekvivslensklassene assosiert med den andre ekvivalensrelasjonen.

Man kan spørre seg selv om hva slags filosofisk interesse rent mengdeteoretiske betraktninger av denne karakter har. Saken er nå den at dersom man har mulige verdener i tankene lett kan tenke seg en rekke ekvivalensrelasjoner mellom dem som synes å være av interesse.

La oss anta at man kan snakke om den momentane totalopplevelse som fremtrer for bevisstheten til et individ x ved tidspunktet t i verdenen w. Hvis en momentan totalopplevelse kan fremtre for bevisstheten til et individ x ved et eller annet tispunkt i en eller annen logisk mulig verden skal vi omtale x som *et subjekt*, eller om man vil, et *opplevende subjekt* eller *sensitivt subjekt*. Er y en momentan totalopplevelse som kan fremtre for et eller annet subjekt ved et eller annet tidspunkt i en eller annen mulig verden skal vi kalle y for *en logisk mulig totalopplevelse*.

To verdener, la oss kalle dem w og w' sies nå å ha den samme totale mentale historie hvis og bare hvis vi har for ethvert subjekt x, ethvert tidspunkt t og enhver logisk mulig totalopplevelse a at a fremtrer for bevisstheten til x ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis a fremtrer for bevisstheten til x vd tidspunktet t i verdenen w'.

Man ser umiddelbart fra definisjonen av denne relasjonen at det å ha den samme totale mentale historie er en ekvivalensrelasjon. Den deler derfor feltet av mulige verdener inn i ekvivalensklasser. Dette systemet av ekvivalensklasser utgjør så en partisjon av I som i sin tur bestemmer en mengde med utsagn. For å ha et navn på denne mengden med utsagn kunne man kalle den for *mengden av utsagn om mentale begivenheter.*

Man kan også definere en annen ekvivalensrelasjon over mengden av mulige verdener som har et visst "filosofisk" preg. Er w en mulig verden kunne man kanskje tillate seg å snakke om den momentane fysiske totaltilstand som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w. Det behøver naturligvis ikke å eksistere noen slik totaltilstand, men man kan rimeligvis, slik virker det i alle fall på meg, tenke seg at det finnes noen verdener w der det til ethvert tidspunkt t finnes en og bare en momentan fysisk totaltilstand som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w.

Vi sier at s er en logisk mulig momentan fysisk totaltilstand dersom og bare dersom det finnes en mulig verden w og et tidspunkt t slik at s er den momentane fysiske totaltilstanden som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w. Man kan så si at verdenen w har den samme *fysiske totalhistorien* som verdenen w' hvis og bare hvis man har for ethvert tidspunkt t og enhver logisk mulig momentan fysisk totaltilstand s at s foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis s foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w'.

Man ser umiddelbart at også denne relasjonen må være en transitiv,symmetrisk og refleksiv relasjon over mengden av mulige verdener, og at den derfor er en ekvivalensrelasjon.

La oss kalle den ekvivalensrelasjonen vi nå har definert for den fysiske ekvivalensrelasjonen og den relasjonen vi tidligere definerte for den mentale ekvivalensrelasjonen. Den fysiske ekvivalensrelasjonen deler naturligvis, som vi allerede har nevnt, mengden av mulige verdener inn i ekvivalensklasser, og dette systemet av ekvivalensklasser utgjør en partisjon av I. Den mengden av utsagn som er bestemt av denne partisjonen skal vi kalle for *mengden av utsagn om fysiske begivenheter.*

Man kan nå spørre om hvordan den fysiske og mentale ekvivalensrelajonen er relatert til hverandre. Det er naturligvis flere muligheter. En mulighet er at den fysiske

ekvivalensrelasjonen er strengt inkludert i den mentale ekvivalensrelasjonen. Dette innebærer at dersom to mulige verdener har den samme fysiske totalhistorie så må de også ha den samme mentale totalhistorie. Dette innebærer i sin tur at den fysiske totalhistorien i en mulig verden entydig bestemer den mentale totalhistorien. En ytterligere konsekvens av dette er at mengden av alle utsagn om mentale begivenheter er strengt inkludert i mengden av alle utsagn om fysiske begivenheter. Man ser fra dette at den påstand at den fysiske ekvivalensrelasjonen er strengt inkludert i den mentale representerer en svak form for fysikalisme.

Naturligvis kan man ikke på basis av de begrepsdannelser og de premisser vi arbeider med her, premisser og begrepsdannelser som er av en generell mengdeteoretisk art, avgjøre denne påstanden. Men visse aspekter ved de konsekvenser en har kan åpenbart belyses innenfor den rammen vi her har satt opp.

Man kan også lettere formulere alternativer til den betraktede tese og undersøke andre muligheter innenfor den oppsatte ramme. En annen mulighet enn den å hevde at alle verdener som har den samme fysiske historie har den samme mentale historie, er å hevde at det fysiske og mentale, rent logisk sett, om ikke nødvendigvis i kausal henseende, er uavhengige av hverandre. Man kunne med andre ord betrakte den tese at det for ethvert par av verdener finnes det en logisk mulig verden som har den samme mentale historien som den første verdenen i paret og den samme fysiske historien som den andre verdenen i paret. En slik tese innebærer at ethvert utsagn om mentale hendelser logisk sett er forenelig med ethvert utsagn om fysiske begivenheter. Intet utsagn om mentale begivenheter kan derfor være identisk med noe utsagn om fysiske begienheter. Mengden av utsagn om mentale begivenheter kan følgelig ikke være noen delmengde av mengden av utsagn om fysiske begivenheter.

Det er også en tredje mulighet som, i det minste teoretisk sett, kan tas i betraktning. Påstanden er at to verdener som har den samme mentale historie også har den samme fysiske historie. Dette innebærer at den mentale totalhistorie i en mulig verden entydig bestemmer den fysiske totalhistorien. I sin tur impliserer ette at mengden av alle utsagn om fysiske begivenheter, i den betydning vi har angitt, er en delmengde av mengden av utsagn om mentale begivenheter. Man kan si at dette siste representerer en form for fenomenalisme. Enhver tale om fysiske forhold er dypest sett tale om mentale begivenheter. Det bør imidlertid bemerkes at denne form for fenomenalisme ikke uten videre innebærer at man effektivt kan oversette setninger om fysiske begivenheter til setninger om totalopplevelser. Tesen er langt svakere. Den er imidlertid ikke av den grunn særskilt plausibel. Den nevnes her bare fordi den er et eksempel på en påstand som virker filosofisk interessant og hvis forhold til andre teser i noen utstrekning kan belyses ved hjelp av e begreper vi her har innført.

La oss nå gi en oversikt over selve innholdet i dette skrift. I det neste avsnittet, §2, gir vi rigorøse definisjoner av begrepene ekvivalensrelasjon og partisjon samt definerer hva som menes med at en partisjon representerer en ytterligere oppdeling av en annen. I den etterfølgende paragrafen, §3, formulerer vi så en rekke satser, i alt åtte stykker, som gjelder om disse begrepsdannelsene. I §4 gis så detaljerte bevis for de satsene som ble formulert i §3.

I §5 tar vi opp det temaet som ble nevnt innledningsvis. En partisjon P av en mengde X bestemmer en bestemt mengde av utsagn som er inkludert i $Pt(X)$[2], men som ikke nødvendigvis er identisk med Pt(X). Vi kaller denne utsagnsmengden for utsagnsmengden bestemt av P og betegner den med U*(P). I dette avsnittet viser vi at dersom en ekvivalensrelasjon er strengt inkludert i en annen vil utsagnsmengden bestemt av den partisjonen den andre ekvivalensrelasjonen gir opphav til være strengt inklusert i den

2 "Pt(X)" betegner potensmengden til X.

utsagnsmengden som er bestemt av den partisjonen som den første ekvivalensrelasjonen gir opphav til. Vi viser også en rekke andre satser som gir et mer utfyllende bilde av dette forhold.

i den siste paragrafen er det vesentligste av innholdet et knippe av teoremer som viser at det er en isomorfi mellom den naturlige boolske algebraen basert på mengden av de mengder som er inkludert i en partisjon P og den naturlige boolske basert på den utsagnsmengden som er bestemt av P. Tilslutt nevnes det at §7 inneholder en kort oppsummering av arbeidet.

§2 Ekvivalensrelasjoner og partisjoner

I denne paragrafen skal vi presist definere begrepet 'ekvivalensrelasjon' og begrepet 'partisjon'. En ekvivalensrelasjon R over en vilkårlig mengde X er en relasjon som er refleksiv over X, symmetrisk og transitiv. Formelt gir vi den følgende definisjon:

Definisjon 2.1 R er en ekvivalensrelasjon over X hvis og bare hvis
(i) X er en mengde og R Inkl XxX
(ii) $(Ax)(x\hat{e}X \rightarrow \langle x,x\rangle\hat{e}R)$
(iii) $(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}X \,\&\, \langle x,y\rangle\hat{e}R \rightarrow \langle y,x\rangle\hat{e}R)$
(iv) $(Ax)(Ay)(Az)(x,y,z\hat{e}X \,\&\, \langle x,y\rangle\hat{e}R \,\&\, \langle y,z\rangle\hat{e}R \rightarrow \langle x,z\rangle\hat{e}R)$

Er R en ekvivalensrelasjon over X og aêX betegner [a];(R,X) mengden av alle de elementer i X som er R-ekvivalente med a, dvs. mengden Mg(x: xêX & <x,a>êR). Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 2.2 Anta R er en ekvivalensrelasjon over X og at aêX. Da setter vi:
[a];(R,X) = Mg(x: xêX & <x,a>êR)

Vi kaller [a];(R,X) for ekvivalensmengden til elementet a med hensyn på ekvivalensrelasjonen R over X. Når det ikke er noen tvil om hva som er R og X skriver vi "[a]" i stedet for det langt mer klumsete uttrykket "[a];(R,X)". Mengden av alle [a];(R,X) ettersom a gjennomløper X, mengden av alle ekvivalensmengder som bestemmes av R betegner vi med EKv(R,X). Dette uttrykket defineres slik:

Definisjon 2.3 Anta R er en ekvivalensrelasjon over X. Da setter vi:
Ekv(R,X) = Mg([a];(R,X): aêX)

Som nevnt sier vi at en mengde Y er en partisjon av mengden X dersom alle elementene i Y er ikke-tomme delmengder av X som er gjensidig disjunkte og som samlet uttømmer mengden X. Vi bruker "Part(Y,X)" som forkortelse for uttrykket "Y er en partisjon av mengden X" og gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 2.4 Vi sier at Y er en partisjon av X, Part(Y,X), hvis og bare hvis Y er en mengde som oppfyller følgende krav:
(i) Y Inkl Pt(X)
(ii) $(Aa)(a\hat{e}Y \rightarrow a\neq\emptyset)$
(iii) $(Aa)(Ab)(a\neq b \,\&\, a,b\hat{e}Y \rightarrow a\Omega b=\emptyset)$
(iv) UN(Y) = X

De enkelte elementer i en partisjon av mengden X kan naturligvis under visse omstendigheter oppdeles ytterligere slik at man får en finere partisjon av X. Anta P1 og P2 er to parisjoner av mengden X. Da sier vi at P2 representerer en ytterligere oppdeling av P1 hvis og bare hvis vi har at det for ethvert element a som er med i P2 finnes et element b i P1 som er slik at a er en delmengde av b. Formelt sett kan dette begrepet defineres slik:

Definisjon 2.5 Anta P1 og P2 er partisjoner av mengden X. Da har vi at P2 representerer en ytterligere oppdeling av P1 hvis og bare hvis:
(Aa)(aêP2 → (Eb)(bêP1 & a Inkl b))

Dermed har vi definert de viktigste begrepene vi trenger i forbindelse med ekvivalensrelasjoner og partisjoner.

§3 Noen enkle satser om ekvivalensrelasjoner og partisjoner

Hensikten med denne paragrafen er bare å gi en oversikt over noen viktige satser som gjelder om ekvivalensrelasjoner og partisjoner. Vi har dessuten valgt å ta med satser som kan belyse forholdet mellom disse to typene av mengdeteoretiske størrelser. Grunnen til at vi tar eksplisitt opp disse temmelig elementære satsene her er at vi trenger dem i bevisene for satser som vi senere vil formulere. Det er derfor gunstig å ha dem samlet på ett sted. I neste paragraf skal vi gi bevisene for de satsene vi formulerer her.

Den første satsen vi nevner er denne. Er R en ekvivalensrelasjon over mngden X vil systemet av R-ekvivalensmengder over X utgjøre en partisjon. Dette er naturligvis velkjent. Påstanden kan formuleres eksplisitt slik:

Teorem 3.1 Anta R er en ekvivalensrelasjon over X. Da har man Part(Ekv(R,X),X)

Med enhver ekvivalensrelasjon R kan man altså assosiere en naturlig partisjon, nemlig Ekv(R,X). Gitt på den annen side en partisjon Y av X. da kan man definere en relasjon R over X ved å stipulere at to elementer x,y i X skal stå i denne relasjonen til hverandre hvis og bare hvis de hører til den samme mengden i partisjonen Y. Man kan da lett vise at denne relasjonen R er en ekvivalensrelasjon og dessuten at systemet av ekvivalensmengder som denne relasjonen gir opphav til er identisk med partisjonen Y. Formelt sett kan satsen formuleres slik:

Teorem 3.2 Anta Part(Y,X). Definer relasjonen R ved å sette:
R = Mg(<x,y> : x,yêX & (Ea)(aêY & x,yêa)). Da gjelder:
(i) R er en ekvivalensrelasjon over X
(ii) Ekv(R,X) = Y

Anta nå at R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner over X. Da har vi som nevnt ovenfor at Ekv(R1,X) og Ekv(R2,X) er partisjoner av X. Det man nå kan vise er at dersom man i tillegg antar at den første relasjonen er inkludert i den andre, med andre ord R1 Inkl R2, så vil partisjonen Ekv(R21, representere enn ytterligere oppdeling av partisjonen Ekv(R2,X). Dette er innholdet i det følgende teorem:

Teorem 3.3 Anta R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner over X og at R1 Inkl R2. Da har man at Ekv(R1,X) representerer enn ytterligere oppdeling av Ekv(R2,X).

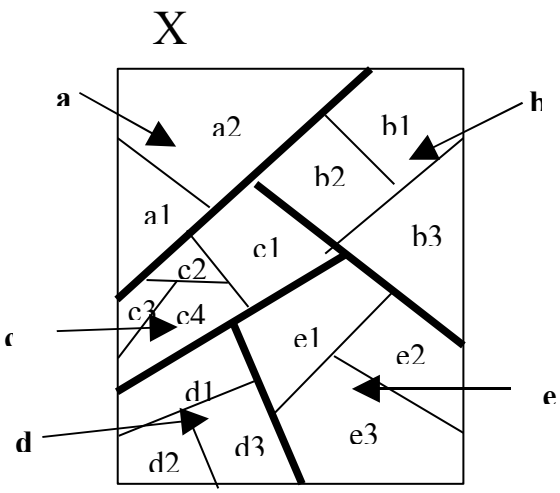
Vi tar også med den følgende sats om partisjoner:

Teorem 3.4 Anta P1 og P2 er partisjoner av X og at P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2. Da har man for ethvert element aêP2 at Mg(x: xêP1 & x Inkl a) er en partisjon av mengden a

Dessuten har det en viss interesse å nevne den følgende sats:

Teorem 3.5 Anta P1 og P2 er partisjoner av X (X≠ø) og at P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2. Anta enn mer at P1ΩP2=ø. Da har vi for alle aêP2 at Mg(x: xêP1 & x x Inkl a) inneholder minst to elementer.

Man kan illustrere forholdet mellom to partisjoner P1 og P2 av mengden X der P2 representerer en ytterligere oppdeling av P1 ved det følgende eksempel:



Her mengden X representert ved et rektangel. Dette er indelt i fem hoveddeler, a,b,c,d og e. Man har altså at mengden {a,b,c,d,e} representerer en partisjon P1 av X. Hver og en av disse mengdene a - e er så delt inn i ytterligere delmengder. Man ser for eksempel at a inn i a1 og a2 slik at a=a1U a2. Videre at b er delt inn i b1,b2 og b3 slik at b= b1U b2 U b3. Tilsvarende for mengdene c, d og e. Fra figuren fremgår det at {a1,a2, b1,..,b3,c1,...,c4, d1,..d3,e1,...,e3} utgjør en partisjon P2 av X i den betydning vi har innført. Man ser imidlertid også at for eksempel P3= {a,b,c,d,e1,e2, e3} også representerer en ytterligere oppdeling av P1. Vi har imidlertid at
P1ΩP2 =ø, mens derimot P1ΩP3 = {a,b,c,d} ≠ ø.

Definisjon 3.6 Anta at X er en ikke-tom mengde og at P er en partisjon av X. Da definerer vi ekvivalensrelasjonen over X bestemt av partisjonen P, i symboler "e(P,X)" ved:

e(P,X) = Mg(<x,y>: x,yêX & (Ea)(aêP & x,yêa))

Det er mulig å vise en setning som i en viss forstand er omvendingen av Teorem 3.3

Teorem 3.7 Anta P1 og P2 er partisjoner av mengden X der X≠ø. Anta P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2. Da har vi at ekvivalensrelasjonen over X bestemt av P1 er inkludert i ekvivalensrelasjonen over X bestemt av P2, med andre ord:

e(P1,X) Inkl e(P2,X)

Den siste satsen vi nevner er denne:

Teorem 3.8 Anta P1 og P2 er partisjoner av mengden X der X≠ø. Anta at P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2. Under disse omstendigheter har vi at de følgende to betingelser er ekvivalente:

(i) (Aa)(aêP1 → (Eb)(bêP2 & a SInkl b))

(ii) P1 Ω P2 = ø

§4 Bevis for satsene om ekvivalensrelasjoner og partisjoner som ble nevnt i forrige paragraf.

I dette avsnittet skal vi gi detaljerte bevis for de syv satsene vi formulerte i forrige avsnitt. Hvis leseren finner det trettende å gå igjennom utførlige bevis for satser med et såpass elementært innhold som dem vi så langt har presentert er det intet i veien for at vedkommende kan hoppe over det som er skrevet her og gå direkte til §5.

Bevis for Teorem 3.1: Anta at R er en ekvivalensrelasjon over X. Vi skal da vise at Ekv(R,X) er en partisjon av X. Dette innebærer at vi må vise at Ekv(R,X) oppfyller de kravene (i) - (iv) som er nevnt i Definisjon 2.4.

Ad (i): Anta bêEkv(R,X). Da har vi per definisjon at bêMg([a];(R,X): aêX). Dette innebærer at det finnes aêX slik at b= [a];(R,X). Ved hjelp av Definisjon 2.2 følger herav at b= Mg(y: yêX & <y,a>êR). I sin tur følger fra dette: b Inkl X. Dette innebærer at bêPt(X). Siden b var et vilkårlig element i Ekv(R,X) følger at Ekv(R,X) Inkl Pt(X).

Ad (ii): Anta bêEkv(R,X). Da har vi at det finnes aêX slik at b= [a];(R,X) = Mg(y: yêX & <y,a>êR). Dette følger ved hjelp av Definisjon 2.2 og Definisjon 2.3. Nå har vi siden R er en ekvivalensrelasjon over X at (Ax)(xêX → <x,x>êR). Det følger derfor at <a,a>êR og derfor at aêb. Herav har vi naturligvis b≠ø.[

Ad (iii): Anta (1) b,cêEkv(R,X) og at b≠c. Vi skal vise at bΩc =ø. Fra (1) og Definisjonen av Ekv(R,X) følger det at det finnes a1, a2êX slik at

(2) b=[a1];(R,X) & c= [a2];(R,X).

Anta for reduktio at absurdum at (3) bΩc ≠ ø. Da finnes det y slik at (4) yêbΩc. Fra dette og (2) følger: (5) yê[a1];(R,X) & yê[a2];(R,X). Herav har vi ved hjelp av Definisjon 2.2 at

(6) <y,a1>êR & <y,a2>êR, og derfor, siden R er symmetrisk og transitiv:

(7) <a1,a2>êR. Anta for vilkårlig z at zêb = [a1];(R,X). Da har vi <z,a1>êR. Fra dette, (7) og et forhold at R er transitiv følger <z,a2>êR. Men da zê[a2];(R,X) =c. Det følger at b Inkl c. På tilsvarende vis kan man vise at c Inkl b. Vi har derfor at b=c. Dette strider imidlertid mot forutsetningen at b≠c. Det følger at (3) ikke kan holde og derfor at bΩc=ø. Dette viser at det tredje kravet i Definisjon 2.4 holder.

Ad (iv): Det er nødvendig å vise at UN(Ekv(R,X)) = X. Vi viser først inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig z at (1) zêUN(Ekv(R,X)). Da følger at det finnes b slik at: (2) zêb & bêEkv(R,X). Ved hjelp av Definisjon 2.2 og Definisjon 2.3 kan man herav slutte at det finnes aêX slik at (3) b = Mg(y: yêX & <y,a>êR). Siden zêb følger ved hjelp av (3) at zêX. Dette viser at UN(Ekv(R,X)) Inkl X

Anta på den annen side at zêX for vilkårlig z. Fra definisjonen av ekvivalensrelasjon, Definisjon 2.1, har vi da at <z,z>êR. Det følger herav at zêMg(y: yêX & <y,z>êR). Fra dette følger så ved hjelp av Definisjon 2.2 at zê[z];(R,X) & zêX. Herav følger [z];(R,X)êEkv(R,X) = Mg([a];(R,X): aêX). Det må altså finnes b slik at zêb & bêEkv(R,X). Herav har man: zêUN(Ekv(R,X)). Dette viser at Ekv(R,X) oppfyller det fjerde kravet i definisjonen av en partisjon.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Bevis for Teorem 3.2: (a) Anta at Part(Y,X) og la R være definert ved:

(0) R = Mg(<x,y>: x,yêX & (Ea)(aêY & x,yêa))

Vi viser først at R er en ekvivalensrelasjon.

(i) Anta aêX for vilkårlig a. Siden UN(Y) = X følger det at det finnes et element bêY der aêb. Da har man åpenbart a,aêX & (Eb)(bêY & a,aêb). Fra dette samt definisjonen av R følger <a,a>êR. Dette viser at R er refleksiv.

(ii) Anta at x,yêX og at <x,y>êR for vilkårlige x,y. Ved hjelp av (0) følger da: x,yêX & (Ea)(aêY & x,yêa). Herav har vi åpenbart at y,xêY & (Ea)(aêY & y,xêa) og derfor at <y,x>êR. Dette viser at R er symmetrisk.

(iii) Anta x,y,zêX & (1) <x,y>êR og (2) <y,z>êR. Fra (1), (2) og definisjonen av R følger det at det finnes a,b slik at:

(3.1) x,yêX & aêY & x,yêa

(3.2) y,zêX & bêY & y,zêb

Dette innebærer, siden yêa&yêb, at aΩb=ø. Siden Y er en partisjon har vi da ved hjelp av det det tredje punktet i Definisjon 4.3 at a=b. Det følger at x,zêb & bêY & x,zêb. Ved hjelp av (0) har vi da <x,z>êR. Dette viser at R er transitiv.

(b) Det er også nødvendig å vise at Ekv(R,X) = Y. Anta derfor for vilkårlig a at (1) aêEkv(R,X). Ved hjelp av definisjonen av Ekv(R,X) følger det da at det finnes b slik at (2) bêX og (3) a= Mg(y: yêX & <y,b>êR). Siden Y er en partisjon av X og bêX følger det at det finnes d1 slik at (4) bêd1 & d1êY. Dette følger fra den fjerde klausulen i Definisjon 2.4. Det vil nå være nok å vise, for å vise at Ekv(R,X) Inkl Y, at a=d1. Anta derfor for vilkårlig x at (5) xêa. Da har vi ved hjelp av (3) at (6) <x,b>êR & xêX. Fra dette og definisjonen av R følger det at det finnes d2 der (7) d2êY & x,bêd2. Men fra (4) og (7) følger bêd1& bêd2 og derfor at d1Ωd2 ≠ø. Siden d1,d2êY følger det, siden Y er en partisjon at d1=d2. Herav har vi ved hjelp av (7) at xêd1. Men x var et vilkårlig objekt slik at (5). Det følger at x Inkl d1. Anta på den annen side at xêd1. Ved hjelp av (4) har vi da x,bêd1 &d1êY. Siden xêd1 følger xêX. Derfor har vi i lys av definisjonen av R at xêX & <x,b>êR. Det følger at xêa. Dermed har vi også vist at d1 Inkl a. Det følger at a=d1, og siden d1êY at aêY. Vi har nå vist at Ekv(R,X) Inkl Y

Anta på den annen side for vilkårlig a at aêY. Det er nødvendig å vise at aêEkv(R,X). I lys av definisjonen av Ekv(R,X) innebærer dette at vi må vise at det finnes b der vi har

(8) bêX & a= Mg(y: yêX & <y,b>êR)

Siden aêY har vi fordi Y er en partisjon av X at a er ikke-tom. Det må derfor finnes et eller annet b slik at (9) bêa. Vi skal vise at (8) holder. Anta derfor for vilkårlig x at xêa. Siden aêY har vi da xêa êY og derfor xêUN(Y). Siden Y er en partisjon av X følger UN(Y) =X og

derfor xêX. Vi har derfor at x,bêa. Siden aêY har vi enn mer (Ed)(dêY & x,bêd). Fra dette og (0) kan vi slutte xêX & <x,b>êR. Dette viser at inklusjonen mot høyre i (8). Anta på den annen side, for vilkårlig x at xêX & <x,b>êR. I lys av definisjonen av R må det da finnes d slik at
dêY & x,bêd. Siden bêa i henhold til (9) har vi da dΩa≠ø og derfor , siden Y er en partisjon og d,aêY at d=a. Siden xêd følger da xêa. Dette viser inklusjonen mot venstre i (8). Siden bêa og aêY følger at beUN(Y) og derfor at bêX, siden UN(Y)=x når Y er en partisjon.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 3.2. **QED.**

Bevis for Teorem 3.3: Anta at R1 og R2 er to ekvivalensrelasjoner over X og at
(1) R1 Inkl R2. Ved hjelp av Teorem 3.1 kan vi da slutte at Ekv(R1,X) og Ekv(R2,X) er partisjoner av mengden X. Vi skal vise at Ekv(R1,X) representerer en ytterligere oppdeling av Ekv(R2,X). Fra Definisjon 2.5 ser man at det vil være tilstrekkelig å bevise:

(2) (Aa)(aêEkv(R1,X) → (Eb)(bêEkv(R2,X) & a Inkl b))

Anta derfor for vilkårlig a at (3) aêEkv(R1,X). Da finnes zêX slik at

(3) a= [z];(R1,X) = Mg(y: yêX & <y,z>êR1). Definer b ved:

(4) b= Mg(y: yêX & <y,z>êR2). Siden zêX kan man da slutte
(5) bêEkv(R2,X). Anta for vilkårlig x at xêa. Det følger da ved hjelp av (3) at xêX & <x,z>êR1. Siden R1 Inkl R2 har vi herav xêX & <x,z>êR2. Herav kan man ved hjelp av (4) slutte: xêb. Siden x var vilkårlig har vi vist a Inkl b. Men fra dette og (5) følger det vi ønsker, nemlig: (Eb)(bêEkv(R2,X) & a Inkl b). **QED.**

Bevis for Teorem 3.4: Anta at P1 og P2 er partisjoner av X og at P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2. Anta at a er et vilkårlig element i P2. Vi må da vise at Mg(x: xêP1 & x Inkl a) er en partisjon av mengde a. Setter vi Y= Mg(x: xêP1 & x Inkl a) må vi altså vise at Y oppfyller kravene (i) - (iv) i Definisjon 2.4.

Ad (i): Anta xêY for vilkårlig x. Fra definisjonen av Y følger da x Inkl a og derfor xêPt(A). Siden x var vilkårlig har vi altså at Y Inkl Pt(a). Dette viser at Y oppfyller det første kravet.

Ad (ii): Anta xêY for vilkårlig x. Fra definisjonen av Y har vi i så fall xêP1 & x Inkl a. Siden P1 er en partisjon følger det at x≠ø.

Ad (iii): Anta x,yêY & x≠y. Da har vi x,yêP1 i lys av definisjonen av Y og x≠y. Siden P1 er en partisjon av X følger det at xΩy=ø. Det viser at Y også oppfyller det tredje kravet i Definisjon 2.4.

Ad (iv): Vi må vise at UN(Y) = a. Anta for vilkårlig x at xêUN(Y). Da finnes det y slik at xêy & yêY. Siden yêY har vi etter definisjonen av Y at y Inkl a. Det følger at xêa. Dette viser at UN(Y) Inkl a.

Vi må imidlertid også vise inklusjonen den andre veien. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x0 der (1) x0êa og (2) ¬(x0êUN(Y)). Fra (2) følger (3) ¬(Ey)(x0êy & yêY). Herav følger i sin tur, siden Y = Mg(x: xêP1 & x Inkl a) at

(4) ¬(Ey)(x0êy & yêP1 & y Inkl a). Dette impliserer:

(5) (Ay)(x0êy & yêP1 → ¬(y Inkl a))

Nå har vi at aêP2 og derfor siden P2 Inkl Pt(X) at a Inkl X. siden x0 i henhold til (1) er med i a følger at x0êX. Siden P1 er en partisjon av X og vi derfor har UN(P1)=X følger det at det finnes b slik at (6) bêP1 & x0êb. Fra dette og (5) kan man slutte: (7) ¬(b Inkl a). Dette impliserer at det finnes z0 slik at (8) z0êb & ¬(z0êa). Siden P1 er en ytterligere oppdeling av P2 og bêP1 finnes det c der (9) cêP2 & b Inkl c. Vi har x0êa, og fra (6) og (9) har vi enn mer x0êc. Derfor aΩc≠ø. Men a,cêP2 og siden P2 er en partisjon av X følger det da at (10)

a=c. Men fra (9) og (10) følger b Inkl a som åpenbart strider mot (7). Det kan derfor ikke finnes noe x0 slik at (1) og (2) holder. Det følger at a Inkl UN(Y).

Dette avslutter beviset for Teorem 3.4. **QED.**

Bevis for Teorem 3.5: Anta forutsetningene i satsen holder og at P1Ωp2=ø. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes a0êP2 slik at Mg(x: xêP1 & x Inkl a0) kun inneholder et element. Dette innebærer at det finnes c slik at

(1) Mg(x: xêP1 & x Inkl a0) = {c}

Fra forutsetningene i satsen og Teorem 3.4 følger det at Mg(x: xêP1 & x Inkl a0) er en partisjon av a0. Da må vi ha at UN(Mg(x: xêP1 & x Inkl a0)) = a0. Men i lys av (1) impliserer dette at

UN({c})=a0. Men UN({c}) = c. Vi må derfor ha c=a0. Herav har vi ved hjelp av (1) at a0êP1. Men a0êP2. Det følger at P1ΩP2≠ø, noe som strider mot forutsetningen om at P1ΩP2=ø. Dette viser at satsen holder. **QED.**

Bevis for Teorem 3.7: Anta forutsetningene i satsen holder. Det er nødvendig å bevise:

(1) e(P1,X) Inkl e(P2,X)

Anta for vilkårlige x,y at (2) <x,y>ê e(P1,X). Da har vi i lys av definisjonen av e(P,X) at (3) x,yêX & (Ea)(aêP1 & x,yêa). Det må med andre ord finnes noe a der (4) aêP1 & x,yêa. Siden P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2 følger det fra (4), siden aêP1, at det må finnes b slik at (5) bêP2 & a Inkl b. Fra dette og (4) har man (Eb)(bêP2 & x,yêb). Siden x,yêX har vi da ved hjelp av definisjonen av e(P,X) at <x,y>ê e(P2,X). Dette viser at Teorem 3.7 holder. **QED.**

Bevis for Teorem 3.8: Anta forutsetningene i satsen holder. (a) Vi viser først at betingelsen (ii) i satsen impliserer (i). Anta derfor at (1) P1ΩP2=ø. Anta for reduktio ad det finnes a der (2) aêP1 og (3) ¬(Eb)(bêP2 & a SInkl b). Siden P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2 har vi per definisjon:

(4) (Aa)(aêP1 → (Eb)(bêP2 & a Inkl b)) Fra (2) og (4) følger eksistensen av noe b der: (5) bêP2 & a Inkl b. Fra (5) og (3) følger (6) ¬(a SInkl b). Men (5) og (6) impliserer a=b. Fra dette, (2) og (5) kan man konkludere med at aêP1ΩP2. Dette strider imidlertid mot (1). Dette viser at (ii) impliserer (i).

(b) Vi må også vise at betingelsen (i), som er oppført i satsen, impliserer betingelsen (ii). Anta derfor (7) (Aa)(aêP1 → (Eb)(bêP2 & a SInkl b)). Anta dessuten for reduktio at P1ΩP2≠ø. Da finnes det c slik at (8) cêP1 og (9) cêP2. Fra (7) og (8) følger at det finnes b slik at (10) bêP2 & c SInkl b. Siden c SInkl b følger at c≠b. Siden c,bêP2 har vi siden P2 er en partisjon av X at (11) cΩb=ø. Men cêP1 og siden P1 er en partisjon må vi ha at c≠ø. Da finnes x slik at xêc. Ved hjelp av (10) kan man da slutte xêcΩb. Men dette strider mot (11). Dette viser at (i) impliserer (ii)

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for teoremet. **QED.**

§5 Om utsagnsmengder indusert av ekvivalensrelasjoner

Er R en ekvivalensrelasjon over mengden X utgjør mengden av ekvivalensklasser som R genererer, Ekv(R,X) en partisjon av X. Er R2 en ekvivalensrelasjon over X som er inkludert i ekvivalensrelasjonen R1 over den samme mengden vil mengden av ekvivalensklassene som R1 genererer representere en ytterligere oppdeling av den mengden med ekvivalensklasser som R2 genererer. Er enn mer R1 strengt inkluder i R2 må det finnes minst to disjunkte

elementer i Ekv(R1,X) som begge er inkludert i et element som er med i Ekv(R2,X). Dette er innholdet i det følgende teorem.

Teorem 5.1 Anta R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner over X og at R1 SInkl R2. Da finnes det et element aêEkv(R2,X) og to elementer b1, b2êEkv(R1,X) der b1Ωb2=ø og der
b1 Inkl a og b2 Inkl a

Bevis: Siden (1) R1 SInkl R2 må det, siden R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner av X finnes x0, y0 slik at (2) x0,y0êX & <x0,y0>êR2 og (3) ¬(<x0,y0>êR1) Siden x0êX har vi at
(4) Mg(z: zêX & <z,x0>êR1)ê Ekv(R1,X). Vi definerer b1 ved:
(5) b1 = Mg(z: zêX & <z,x0>êR1). Ved hjelp av denne definisjonen og (4) følger åpenbart at (6) b1êEkv(R1,X). Definer b2 ved: (7) b2= Mg(z: zêX & <z,y0>êR1). Da har vi åpnbart (8) b2êEkv(R1,X). Anta for reduktio ad absurdum at det fantes z slik at zê(b1Ωb2). I lys av (5) og (7) kan vi da slutte at (8.1) <z,x0>êR1 og <z,y0>êR1. Siden R1 er en ekvivalensrelasjon må R1 være transistiv og symmetrisk. Det følger derfor fra (8.1) at <x0,y0>êR1. Dette strider mot (3). Vi kan derfor konkludere med at (9) b1Ωb2=ø. Sett per definisjon
a = Mg(z: zêX & <z,x0>êR2) . Da har vi åpenbart at aêEkv(R2,X).
Vi må vise at b1 Inkl a. Anta derfor for vilkårlig z at zêb1. Da følger ved hjelp av definisjonen av b1 at zêX & <z,x0>êR1. Siden R1 SInkl R2 har man <z,x0> êR2 og derfor i lys av definisjonen av a at zêa. Siden z var vilkårlig objekt har vi vist at b1 Inkl a. Antar man at z er et vilkårlig objekt der zêb2 har man ved hjelp av definisjonen at zêX &<z,y0>êR1. Siden R1 er inkludert i R2 følger da at
(10) <z,y0>êR2. Fra (2) følger (11) <x0,y0>êR2. Siden R2 er en ekvivalensrelasjon kan man fra (10) og (11) slutte: <z,x0>êR2. Fra dette, det at zêX og definisjonen av a følger zêa. Siden z var vilkårlig følger b2 Inkl a. Vi har nå vist at det finnes aêEKv(R2,X) og b1, b2 der b1Ωb2=ø og b1 Inkl a & b2 Inkl a. Dette viser at satsen holder. **QED.**

Er X en mengde skal vi kalle elementene i Pt(X) mengden av utsagn bestemt av X. Anta P er en partisjon av mengden X. Da er mengden av utsagn generert av denne partisjonen P, i symboler U*(P), mengden av alle de utsagn xêPt(X) om er slik at x= UN(a) for en eller annen delmengde a Inkl P. Formelt sett er uttrykket "U*(P)" definert slik:
U*(P) = Mg(x: xêPt(X) & (Ea)(a Inkl P & x = UN(a))
Brukes uttrykket "U*(P)" er det naturligvis forutsatt at P er en partisjon av en eller annen mengde og at utsagnene generert av P er blandt de utsagnene som er bestemt av denne mengden.

Vi kommer nå til en sats som er av en viss betydning. Anta at R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner over den samme mengden X. Anta R1 er strengt inkludert i R2. Innholdet i satsen er da at mengden av de utsagn som er generert av partisjonen Ekv(R2,X) under disse omstendigheter er strengt inkludert i mengden av de utsagn som er generert av partisjonen Ekv(R1,X).

Teorem 5.2 Anta R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner over X og at R1 SInkl R2. Da har man:
U*(Ekv(R2,X)) SInkl U*(Ekv(R1,X))

Bevis: Vi skal først vise at (1) U*(Ekv(R2,X)) Inkl U*(Ekv(R1,X)). Anta derfor for vilkårlig u at
(2) uêU*(Ekv(R2,X)). Da har vi i lys av definisjonen av U*(P), der P er en partisjon av X, at

det finnes a1 slik at (3) a1 Inkl Ekv(R2,X) & u = UN(a1). Vi har også (3.1) uêPt(X). Siden (4) R1 SInkl R2 har vi R1 inkl R2. I følge Teorem 3.3 vil derfor Ekv(R1,X) representere en ytterligere oppdeling av Ekv(R2,X). Dette innebærer:

(5) (Aa)(aêEkv(R2,X) → (Eb)(bêEkv(R1,X & b Inkl a))

Det vil være nok å vise, når man tar (3) i betraktning, at det finnes b1 der vi har:

(6) b1 Inkl Ekv(R1,X) & UN(b1) = UN(a1) =u

Vi setter per definisjon: (7) b1 = UN(Mg(q: qêEkv(R1,X) & (Ec)(cêa1 & q Inkl c))). Målet er da å vise (6) holder når b1 defineres på denne måten. Det er åpenbart, når man studerer definisjonen (7) at vi har: (8) b1 Inkl Ekv(R1,X). Det gjenstår derfor bare å bevise:

(+) UN(b1) = UN(a1)

(A) Vi tar først for oss inklusjonen mot høyre i (+) og viser at den holder. Anta for vilkårlig x at

(9) xêUN(b1). Da har vi at det finnes c slik at xêc & cêb1. Det følger ved hjelp av (7) at

(10) xêc og (11) (Ed)(dêa1 & c Inkl d). Da har vi (12) dêa1 & c Inkl d for noe d. Fra (10) og (12) følger xêd & dêa1. Herav kan man så i sin tur slutte xêUN(a1). Dette viser at inklusjonen mot høyre holder.

(B) Anta på den annen side for vilkårlig x at (13) xêUN(a1). Da finnes det c slik at (14) xêc & cêa1. Siden a1 Inkl Ekv(R2,X) ifølge (3) har vi at c ê Ekv(R2,X) og derfor at c Inkl X. Det følger fra dette og (14) at (15) xêX. Siden xêX og Ekv(R1,X) er en partisjon av X må det finnes en d der vi har: (16) dêEkv(R1,X) og (17) xêd. Fra (16) følger eksistensen av noe z0 slik at (18) z0êX & d = Mg(y: yêX & <y,z0>êR1). Det vil nå være tilstrekkelig å bevise

(19) d Inkl c fordi vi da vil ha dêEkv(R1,X) & d Inkl c & cêa1 og derfor, i lys av definisjonen av b1, at dêb1. Siden xêd ifølge (17) kan vi i så fall konkludere med at xêUN(b1). Det er altså tilstrekkelig å vise at (19) holder.

Anta derfor (20) yêd for vilkårlig y. Ved hjelp av (18) har vi da (21) <y,z0>êR1. Siden

R1 SInkl R2 følger fra (21) at (22) <y,z0>êR2. Fra dette og det forhold at R2 Inkl XxX, siden R2 er en ekvivalensrelasjon over X, kan i slutte at z0êX. Siden Ekv(R2,X) er en partisjon av X følger det da at det må finnes v0 slik at (23) z0êv0 & v0êEkv(R2,X). Fra dette følger:

(24) v0 = Mg(v: vêX & <v,r0>êR2) for noe r0êX. Siden z0êv0 har vi da <z0,r0>êR2 og derfor ved hjelp av (24) siden R2 er en ekvivalensrelasjon at (25) v0 = Mg(v: vêX & <v,z0>êR2). Siden xêd ifølge (17) har vi ved hjelp av (18) at <x,z0>êR1 Inkl R2. Det følger at xêv0. Men xêc i lys av (14). Vi må derfor ha xê(cΩv0). men cêa1 Inkl Ekv(R2,X) i lys av (3) og (14). Fra (23) har vi at v0êEkv(R2,X). Siden Ekv(R2,X) er en partisjon må vi derfor ha at v0=c. Men yêv0 ifølge (22) og (25). Det følger at yêc. Dermed har vi vist at (19) holder. Det følger at vi har gitt et fullstendig bevis for at inklusjonen mot venstre i (+) holder. Endelig viser dette at (1) holder.

Det gjenstår imidlertid å vise (++) U*(Ekv(R2,X)) SInkl U*(Ekv(R1,X)). Dette innebærer at vi må bevise eksistensen av noe y0 der (26) y0êU*(Ekv(R1,X)) & ¬(y0êU*(Ekv(R1,X))). Fra forutstningene i satsen, det forhold at R1 SInkl R2 og Teorem 5.1 kan vi slutte at det finnes a, b1 og b slik at:

(27) aêEkv(R2,X)

(28) b1,b2êEkv(R1,X) & b1Ωb2= ø & b1 Inkl a & b2 Inkl a

Vi setter per definisjon y0 = b1. Da har vi:

(30) y0ê {b1} & {b1} Inkl Ekv(R1,X) & b1 = UN({b1})

Det følger fra dette at y0=b1êU*(Ekv(R1,X)). Anta for reduktio ad absurdum at

(31) b1êU*(Ekv(R2,X))

Da har vi b1êMg(u: uêPt(X) & (Ea)(a Inkl Ekv(R2,X) & u = UN(a))) ved hjelp av definisjonen av U. Det følger at det da må finnes q slik at

(32) q Inkl Ekv(R2,X) & b1 = UN(q)

Vi kan ikke ha at q=ø, for da har vi UN(q)=ø og følgelig b1=ø. Men b1 er med i partisjonen Ekv(R1,X) og alle elementer i denne partisjonen er ikke-tomme. det følger at det finnes noe c der

(33) cêq. Fra dette og (32) c Inkl UN(q) = b1. Vi har derfor: (34) c Inkl b1. Det er to muligheter:

Tilfelle (i): c=a. Da har vi i lys av (28) b1 SInkl a=c Inkl b1. Dette er åpenbart umulig

Tilfelle (ii): c ≠ a. Siden c,aêEkv(R2,X) følger da at aΩc=ø. Vi har i så fall:

(35) b1 SInkl a & aΩc =ø & c Inkl b1.

Fra dette følger c SInkl a og siden c≠ø har vi da aΩc≠ø. Dette strider mot at aΩc=ø. Dermed har vi vist at (++) holder.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Vi skal i dette avsnittet også gi bevis for den følgende sats:

Teorem 5.3 Anta Part(X,I) og anta at a Inkl X. Da har vi:
I - UN(a) = UN(X-a)

Bevis: Anta (1) Part(X,I) og (2) a Inkl X

(a) Anta for vilkårlig w at (3) wê(I-UN(a)). Da har man at (4) wêI og (5) ¬(wêUNa)

Fra (1) og (4) følger det at det må finnes noe c slik at (6) wêc & cêX. Fra (5) følger: (7) (Ad)(dêa → ¬(wêd)). Fra (6) og (7) følger: ¬(cêa) og derfor ved hjelp av den andre konjunkten i (6) at cê(X-a). Men wêc. Derfor wêUN(X-a). Dette viser riktigheten av inklusjonen mot høyre i konsekventen i teoremet.

(b) Anta på den annen side, for vilkårlig w, at (7) wêUN(X-a). Da kan man slutte at det finnes c der (8) wêc & cê(X-a). Siden X er en partisjon av I og wêc & cêX har vi c Inkl I, og derfor wêI. Anta for reduktio ad absurdum at (10) wêUN(a). Da finnes d slik at (11) wêd & dêa.

Fra dette og (8) følger wêcΩd og derfor (12) cΩd=ø. Men dêa Inkl X og cêX. Siden X er en partisjon av I følger da fra (12) at c=d. Fra dette og (11) følger wêc som strider mot den siste konjunkten i (8). Det følger at ¬(wêUN(a)) og derfor at wê(I-UN(a)).

Dette viser at satsen holder. **QED.**

Teorem 5.2 sier at U*(Ekv(R2,X)) er strengt inkludert i U*(Ekv(R1,X)) om ekvivalensrelasjonen R1 er strengt inkludert i ekvivaleensrelasjonen R2. Det følgende teorem viser at U*(Ekv(R2,X)) er inkludert i U*(Ekv(R1,X)) om R1 er inkludert i R2

Teorem 5.4 Anta R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner over X, der X≠ø. Da har vi om R1 Inkl R2 at U*(Ekv(R2,X)) Inkl U*(Ekv(R1,X))

Bevis: Ser man på det beviset vi ovenfor har gitt for Teorem 5.2 ser man at den første delen av

dette utgjør et bevis for satsen ovenfor. Vi anser derfor Teorem 5.4 for godtgjort. **QED.**

Teorem 5.2 og Teorem 5.4 dreier seg om ekvivalensrelasjoner og forholdet mellom utsagnsmengdene generert av partisjonene Ekv(R1,X) og Ekv(R2,X) der R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner. Men man kan formulere og bevise tilsvarende teoremer om partisjoner noe de følgende to teoremer viser.

Teorem 5.5 Anta P1 og P2 er partisjoner av X og at X≠ø. Anta P1 representerer en ytterligere oppdeling av P2. Da har man:

U*(P2) Inkl U*(P1)

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Definer to relasjoner R;1 og R;2 ved:

(+) R;i = Mg(<x,y>: x,yêX & (Ec)(cêPi & x,yêc)) for i = 1,2

Vd hjelp av Teorem 3.2 ser man da at vi har :

(1) R;i er en ekvivalensrelasjon over X (i=1,2)

(2) Ekv(R;i,X) = Pi (i=1,2)

Ved hjelp av Teorem 3.7 og (+) kan man også slutte at:

(3) R;1 Inkl R;2

Fra (1) - (3) og Teorem 5.2 kan vi slutte at:

U*(P2) = U*(Ekv(R;2,X)) Inkl U*(Ekv(R;1,X)) = U*(P1)

Dette viser at satsen holder. **QED.**

Teorem 5.5 kunne sies å være Teorem 5.4 med ekvivalensrelasjoner erstattet med partisjoner. Det følgende teorem svarer til Teorem 5.1 bortsett fra at vi har erstattet ekvivalensrelasjonene med partisjoner.

Teorem 5.6 Anta P1 og P2 er partisjoner av mengden X og at X≠ø. Anta P1 representerer en finere oppdeling av P2. Anta dessuten at det finnes a, b1,b2 slik at

aêP2 & b1,b2êP1 & b1,b2 Inkl a & b1Ωb2=ø

Da har man at følgende holder:

U*(P2) SInkl U*(P1)

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Definer to relasjoner R;1 og R;2 ved:

(+) R;i = Mg(<x,y>: x,yêX & (Ec)(cêPi & x,yêc)) for i = 1,2

Vd hjelp av Teorem 3.2 ser man da at vi har :

(1) R;i er en ekvivalensrelasjon over X (i=1,2)

(2) Ekv(R;i,X) = Pi (i=1,2)

Ved hjelp av Teorem 3.7 og (+) kan man også slutte at:

(3) R;1 Inkl R;2

Det eneste vi nå behøver å vise er at (4) R;1 SInkl R;2. For fra (1), (2), (4) og Teorem 5.1 kan vi slutte: U*(P2) = U*(Ekv(R;2,X)) SInkl U*(Ekv(R;1,X)) = U*(P1). Som gir oss det vi ønsker. Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise (4).

Nå har vi at (5) aêP2 & b1,b2êP1 & b1, b2 Inkl a & b1Ωb2 =ø. Siden P1 og P2 er partisjoner følger det at b1 og b2 er ikke-tomme. Det finnes derfor x0 og y0 slik at

(6) x0êb1 & y0êb2. Fra (5) og (6) kan man slutte x0,y0êa og derfor i lys av definisjonen av R;2 at (7) <x0,y0>êR;2. Anta for reduktio ad absurdum at <x0,y0>êR;1. Da ville vi ha x0,y0êc for noe cêP1. I lys av (5) og (6) følger det i så fall at

(8) cΩb1≠ø & cΩ b2≠ø. Siden b1,b2,cêP1 og P1 er en partisjon av X kan vi da

slutte at b1 = c = b2. Men dette og (6) impliserer b1Ωb2≠ø. Dette strider mot den siste konjunkten i (5). Vi har derfor ¬(<x0,y0>êR;1). Det følger at (4) holder.

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Den følgende sats er omvendingen til Teorem 5.4. Er ekvivalensrelasjonen R1 inkludert i ekvivalensrelasjonen R2 kan vi ifølge Teorem 5.4 slutte at utsagnssystemet U*(Ekv(R2,I)) er inkludert i utsagnssystemet U*(Ekv(R1,I). Den følgende sats viser at vi også kan slutte den motsatte veien.

Teorem 5.7 Anta R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner over X og at X≠ø. Anta at U*(Ekv(R2,X)) Inkl U*(Ekv(R1,X)). Da har man at R1 Inkl R2.

Bevis: Anta forutsetningene i stsen holder og anta for reduktio ad absurdum at (1) ¬(R1 Inkl R2). Fra (1) følger eksistensen av x slik at (2) xêR1 & ¬(xêR2). Dette innebærer at det finnes x0,y0 slik at x0,y0êX & x = <x0,y0> og der man har:

(3) <x0,y0>êR1 & ¬(<x0,y0>êR2)

Definer a ved: (4) a = Mg(x: xêX & <x,x0>êR1). Fra (3) og (4) følger (5) x0,y0êa siden R1 er en ekvivalensrelasjon. Dessuten har vi (6) aêEkv(R1,X). Dette impliserer i sin tur: (7) aêU*(Ekv(R1,X)) fordi man har at a= UN({a}) & {a} Inkl Ekv(R1,X). Nå har vi imidlertid at (8) x0,y0êX og at R2 er en ekvivalensrelasjon over X. Definer b og c ved å sette:

(9.1) b = Mg(x: xêX & <x,x0>êR2)

(9.2) c = Mg(x: xêX & <x,y0>êR2)

Nå er R2 en ekvivalensrelasjon. Man kan derfor slutte siden ¬(<x0,y0>êR2) at

(10) bΩc =ø

Dessuten har vi siden b,c er ekvivalensmengder med hensyn på R2 at

(11) b,c êEkv(R2,X)

Fra dette siste følger at (12) b,cêU*(Ekv(R2,X)). Det siste følger ved hjelp av (11) fordi vi har: b = UN({b}) & {b} Inkl Ekv(R2, X) & c = UN({c}) & {c} Inkl Ekv(R2, X)

Fra (9.1) og (9.2) fremgår det at (13) x0êb & y0êc. Fra (12) og en av forutsetningene i satsen følger (14) b,cêU*(Ekv(R1,X)). Dette impliserer i lys av definisjonen av U* at det finnes b1,c1 slik at:

(15.1) b= UN(b1) & b1 Inkl Ekv(R1,X)

(15.2) c= UN(c1) & c1 Inkl Ekv(R1,X)

Nå har vi x0êb ifølge (13) og derfor ved hjelp av (15.1), at det finnes d der:

(16) x0êd & dê b1 & b1 Inkl Ekv(R1,X)

Fra (4) og (6) følger

(17) x0êa & aêEkv(R1,X)

Det følger fra (16) og (17) at dΩa≠ø og derfor siden a,dêEkv(R1,X) og det at Ekv(R1,X) er en partisjon av X at a=d. Fra dette og den andre konjunkten i (16) har vi a Inkl UN(b1) og derfor ved hjelp av (15.1): (18) a Inkl UN(b1)=b. Men fra (5) kan kan man slutte y0êa, og derfor ved hjelp av (18) at y0êb. Fra (9.2) har man y0êc. Det følger at y0êbΩc og derfor at bΩc≠ø. Dette strider åpenbart mot (10). Det er altså umulig at ¬(R1 Inkl R2). Det følger at R1 Inkl R2. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Ved hjelp av det teoremet vi nå har vist kan vi også bevise den følgende sats. Man ser at den representerer omvendingen av Teorem 5.2.

Teorem 5.8 Anta R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner over mengden X og at X≠ ø. Anta enn mer at U*(Ekv(R2,X)) SInkl U*(Ekv(R1,X)). Da har man at R1 SInkl R2.

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Vi skal da vise at R1 SInkl R2. Anta for reduktio ad absurdum at (1) ¬(R1 SInkl R2). Da har vi

(2) ¬((Ax)(xêR1 → xêR2) & (Ex)(xêR2 & ¬(xêR1)))

Fra dette følger:

(3) (Ex)(xêR1 & ¬(xêR2)) v (Ax)(xêR2 → xêR1)

Etter forutsetningene i satsen har vi:

(4) U*(Ekv(R2,X)) Inkl U*(Ekv(R1,X))

Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): (Ex)(xêR1 & ¬(xêR2)). Da har vi ¬(R1 Inkl R2). Men dette, (4) og Teorem 5.7 gir oss en motsigelse.

Tilfelle (ii): (Ax)(xêR2 → xêR1). Da har vi R2 Inkl R1. Ved hjelp av forutsetningene om at R1 og R2 er ekvivalensrelasjoner over X, der X ≠ ø, og Teorem 5.4 kan vi da slutte:

(5) U*(Ekv(R1,X)) Inkl U*(Ekv(R2,X)). Fra dette og forutsetningene følger U*(Ekv(R1,X)) SInkl U*(Ekv(R1,X)). Dette er åpenbart umulig.

I begge tilfelle kan vi utlede en motsigelse. Dette viser at (1) er usann og derfor at R1 SInkl R2. **QED.**

Er P en partisjon av en ikke-tom mengde X er det to muligheter som det er nærliggende å dvele ved. Det ene tilfelle er at de enkelte elementene i P er så "små" at den eneste mengden som kan inkluderes i dem er null mengden. I dette tilfelle har vi at ethvert av elementene i P er en enhetsmengde. I dette tilfelle kan man vise at P faktisk er Mg({x}: xêX) og at den utsagnsmengden som er bestemt av P faktisk er Pt(X). Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 5.9 Anta P er en partisjon av mengden X og at X≠ø. Anta videre at (Ax)(xêP → (Ey)(x = {y}) Da har man at

(i) P = Mg({x}: xêX)

(ii) U*(P) = Pt(X)

Bevis: Anta P er en partisjon av X er X≠ø og anta (0) (Ax)(xêP → (Ey)(x = {y})

Vi må først vise at (1) P = Mg({x}: xêX).

(a) Vi tar først for oss inklusjonen mot høyre i (1). Anta yêP for vilkårlig y. Da har vi ved hjelp av (0) at y = {z} for noe z. Siden P er en partisjon av X har vi at P Inkl Pt(X). Siden y êP følger derfor y Inkl X. Fra dette og det at y = {z} følger zêX. Vi har derfor y = {z} & zêX. Det følger at yêMg({x}: xêX)

(b) Vi tar så for oss inklusjonen mot venstre i (1). Anta zêMg({x}: xêX). Da finnes x slik at z = {x} & xêX. Siden xêX og P er en partisjon av X har vi at UN(P) =X og derfor at det finnes d der xêd & dêP. Fra dette og (0) følger at d= {y} for noe y. Siden xêd har vi derfor x=y og følgelig z= {x}={y}=dêP. Det følger at zêP. Siden z var vilkårlig har vi derfor bevist det vi ønsker nemlig Mg({x}:xêX) Inkl P.

Vi må også vise at (2) U*(P) = Pt(X). I lys av definisjonen av U*(P) er inklusjonen mot høyre triviell siden P er en partisjon av X. For å vise inklusjonen mot venstre i (2) anta for vilkårlig z at zêPt(X). Da har vi (3) z Inkl X Definer a ved å sette a= Mg({r}: rêz). Da har vi åpenbart i lys av (3) at a Inkl Mg({r}: rêX). Siden vi har bevist at P = Mg({r}: rêX) følger at

(4) a Inkl P. Nå har vi også at (5) z = UN(a) = UN(Mg({r}: rêz)). Fra (4),(5) og definisjonen

av U*(P) følger zêU*(P). Dette viser at inklusjonen mot venstre i (2) holder.

Dette avslutter beviset for satsen. **QED.**

Som vi nå har sett kan en partisjon av X være så fint oppdelt at dens elementer er mengden av enhetsmengdene av elementene i X. På den annen side kan en partisjon også være så "grov" at den bare betår av ett element. I såfall vil dette element være mengden X selv. I dette tilfellet vil også utsagnsmengden bestemt av partisjonen være maksimalt fåtallig og bare inneholde ø og X, dvs. henholdsvis det "kontradiktoriske" utsagn og det "tautologiske" utsagn.
Disse forhold er sammenfattet i det følgende teorem:

Teorem 5.10 Anta P er en partisjon av X der X≠ø. Anta (Ey)(P = {y}). Da gjelder:
(i) P = {X}
(ii) U*(P) = {ø,X}

Bevis: Anta P er en partisjon av X, der X≠ø, og anta at (1) (Ey)(P = {y}). Da finnes y0 slik at (2) P = {y0}. Siden P er en partisjon av X har vi per definisjon at (3) UN(P) =X. Dette og (2) impliserer (4) UN({y0}) = X. Det følger at y0 = UN({y0}) =X. Ved hjelp av (2) følger så P = {X}. Dette viser at (i) holder.

Vi må også vise at (ii) holder, det vil si at U*(P) = {ø,X}. Det vil i lys av definisjonen av U*(P) være tilstrekkelig å bevise

(5) Mg(x: xêPt(X) & (Ea)(a Inkl P & x = UN(a))) = {ø,X}

Det er åpenbart at inklusjonen mot venstre i (5) holder.

Vi beviser så inklusjonen mot høyre: Anta for vilkårlig x at xêPt(X) & (Ea)(a Inkl P & x = UN(a)). Da finnes det noe a slik at

(6) xêPt(X) & a Inkl P & x = UN(a)

Da har vi, siden vi har bevist at P = {X} at a Inkl {X}. Det er i så fall to muligheter:

Tilfelle (i): a = {X}. Da følger ved hjelp av den siste konjunkten i (6) at x= UN({X})= X. Herav følger så xê{ø,X}, som er det vi ønsker.

Tilfelle (ii): a SInkl {X}. Da må det finnes y0 der vi har

(7) y0 ê{X} & ¬(y0êa). Dessuten må vi ha:

(8) (Az)(zêa → zê{X}) Fra dette følger:

(9) (Az)(zêa → z= X). Fra (7) følger (9.1) y0=X.

Anta for reduktio at a≠ø, det vil si at (Er)(rêa). Da har vi (10) rêa for noe r. Fra dette og (9) følger r=X som sammen med (7) og (9.1) gir oss: ¬(rêa). I lys av (10) følger da rêa & ¬(rêa) som åpenbart er absurd. Det følger at ¬(Er)(rêa). Derfor a=ø. Ved hjelp av (6) har vi da x= UN(a) = UN(ø) = ø ê{ø,X}.

I begge tilfelle har vi at xê{ø,X}. Dette viser at (5) holder.
Dermed har vi gitt et bevis for satsen. **QED.**

§6 Om utsagnsmengder generert av partisjoner

Teorem 6.1 Anta P er en partisjon av mengden X. Anta Y≠ø & Y Inkl X. Definer P' ved å sette:

P' = Mg(z: z≠ø & (Ey)(yêP & z = yΩ Y)

Da har man at P' er en partisjon av Y.

Bevis: Det er nødvendig å vise at P' oppfyller de kravene som stilles til en partisjon. Disse er nevnt i Definisjon 2.4.

(a) Vi viser først at (0) UN(P') = Y. Anta (1) xêUN(P'). Da har vi (2) xêy & yêP' for noe y. Siden yêP' har vi ved hjelp av Definisjon 2.4 at (3) y ≠ø og at det finnes z êP slik at (4) y= zΩY. Siden xêy ifølge (2) følger det da at xêY. Dette viser riktigheten av inklusjonen mot høyre i (0). Anta xêY. Siden Y Inkl X følger det at xêX. Siden P er en partisjon av X finne det da aêP slik at xêa. Siden xêY og xêa har vi da xêaΩY og at aΩY≠ø. Sett per definisjon z0= aΩY. Da har vi (5) xêz0 & z0≠ø & (Ea)(aêP & z0 = aΩY). Det følger at xêUN(P')

(b) Vi må bevise at (Ax)(xêP' → x≠ø). Dette følger umiddelbart fra Definisjonen av P': Anta xêP'. Da xêMg(z: z≠ø & (Ea)(aêP & z = aΩY)). Herav x≠ø.

(c) Det er nødvendig å vise at P' Inkl Pt(Y). Anta xêP'. Da har man ved hjelp av definisjonen av P' at det finnes aêP slik at x= aΩY. Men herav x Inkl Y. Det følger at xêPt(Y).

(d) Tilslutt må vi bevise at følgende holder for vilkårlige x,y:

(6) x,yêP' & x≠y → xΩy=ø

Anta derfor at (7) x,yêP' & x≠y. Ved hjelp av definisjonen av P' kan vi da slutte at det må finnes a,bêP slik at (8) x= aΩY & y=bΩY. Anta for reduktio ad absurdum at (9) xΩy≠ø. Da må det finnes z slik at zêx & zêy. Fra dette og (8) følger at aΩb≠ø. Siden P er en partisjon av X må det da følge at a=b. Ved hjelp av (8) impliserer dette at x=y. Dette strider mot (7). Det følger at xΩy=ø.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for teoremet. **QED.**

Teorem 6.2 Anta P1 er en partisjon av X1 og at P2 er en partisjon av mengden X2. Anta X1Ω X2 =ø. Da er P1 U P2 en partisjon av X1 U X2

Bevis: *(a)* Anta xêP1UP2. Da har vi xêP1 eller xêP2. Er xêP1 har vi siden P1 er en partisjon av X1 at x≠ø. Tilsvarende om xêP2. Alle elementer i P1 U P2 er derfor ikke-tomme.

(b) Anta xêUN(P1UP2) for vilkårlig x. Da finnes det a slik at (1) xêa & aê(P1 U P2). Tilfelle (i) aêP1. Siden P1 er en partisjon av X1 har vi UN(P1)=X1. Det følger at xêa Inkl UN(P1) = X1 Inkl (X1 U X2). Tilfelle (ii) aêP2. Da viser vi på samme måte at xê(X1UX2).

Anta på den annen side at (2) xê(X1 U X2). Da har vi om xêX1 at xêUN(P1) siden P1 er en partisjon av X1, og derfor at xêUN(P1 U P2). Er xêX2 innser man på samme måte at xêUN(P1 U P2)

(c) Siden P1 Inkl Pt(X1) og P2 Inkl Pt(X2) følger det umiddelbart at P1 U P2 Inkl Pt(X1 U X2)

(d) Anta x,yê(P1 U P2) & x≠y. Vi må strengt tatt sondre mellom fire muligheter:
Tilfelle (i): x,yêP1 og x≠ y. I såfall følger det at xΩy=ø siden P1 er en partisjon av X1
Tilfelle (ii): xêP1 & yêP2 & x≠y. Da har vi x Inkl X1 og y Inkl X2. Siden X1ΩX2=ø etter forutsetning må vi da selvfølgelig ha xΩy = ø
Tilfelle (iii): yêP1 & xêP2. Beviset blir som i foregående tilfelle.
Tilfelle (iv): x,yêP2 & x≠y. Da følger umiddelbart at xΩy=ø siden P2 etter forutsetningen er en partisjon av X2.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Er P en partisjon av X er naturligvis utsagnene over X generert av partisjonen P en delmengde av utsagnene over X, ie. Pt(X). Det er imidlertid ikke helt selvinnlysende at U*(P) er lukket under de vanlige boolske operasjonene komplement, uendelig snitt og uendelig union. Dette er imidlertid tilfelle noe det følgende teorem viser:

Teorem 6.3 Anta P er en partisjonen av X. Da gjelder:

(i) aêU*(P) → (X-a)êU*(P)

(ii) ø≠ α & α Inkl U*(P) → Ω(α) êU*(P)

(iii) α Inkl U*(P) → UN(α)êU*(P)

Bevis: *Ad (i)*: Anta (1) aêU*(P). Da følger ved hjelp av definisjonen av U*(P) at det finnes b slik at (2) b Inkl P & a = UN(b). Vi har da at (3) X-a = X - UN(b). Ved hjelp av Teorem 5.3 har vi at X- UN(b) = UN(P-b). Definer c0 ved å sette c0= P -b. Da følger

(4) X-a = UN(c0) & c0 = P-b Inkl P

Fra dette følger så ved hjelp av definisjonen av U*(P) at (X-a)êU*(P). Dette viser at (i) holder.

Ad (ii): Anta (i) α ≠ ø & α Inkl U*(P). Fra den siste konjunkten følger:

(2) (Ay)(yêα → yêPt(X) & (Ea)(a Inkl P & y= UN(a)))

Fra dette har vi så: (3) (Ay)(yêα → Mg(a: a Inkl P & y = UN(a)) ≠ ø)

Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan man fra (3) slutte at det må finnes en utvalgsfunksjon ξ md følgende egenskaper:

(4.1) Dom(ξ) = α

(4.2) (Ay)(yêα → ξ(y) Inkl P & y = UN(ξ(y)))

Siden ξ(y) Inkl P for alle yêα har vi:

(5) Ω/yêα/(ξ(y)) Inkl P

kan vi nå bevise at (+) Ω(α) = UN(Ω/yêα/(ξ(y)) kan vi ved hjelp av definisjonen av U*(P) og (5) slutte at Ω(α)êU*(P). Det fremgår at det er tilstrekkelig å bevise (+).

(A) Vi viser først riktigheten av inklusjonen mot høyre i (+). Anta for reduktio ad absurdum at det finnes noe x0 der vi har:

(6) x0êΩ(α) og (7) ¬(x0êUN(Ω/yêα/(ξ(y)))

Fra (7) følger:

(8) ¬(Ed)(dêΩ/yêα/(ξ(y)) & x0êd)

Fra dette har man så:

(9) (Ad)(x0êd → ¬(dê(Ω/yêα/(ξ(y)))))

Siden de diverse elementene i α er elementer i U*(P) har vi at disse er delmengder av X. Vi har derfor: (10) Ω(α) Inkl X. Fra dette og (6) følger: (11) x0êX. Siden P er en partisjon av X følger det ved hjelp av definisjonen av partisjon, at det må finnes e slik at

(12) x0êe & eêP

Fra (6) følger: (13) (Ay)(yêα → x0êy). Videre følger fra (4):

(13.1) (Ay)(yêα → y = UN(ξ(y)))

Fra (13) og (13.1) kan vi slutte:

(14) (Ay)(yêα → x0êUN(ξ(y)))

Fra (9) og (12) følger: (15) ¬(e ê(Ω/yêα/(ξ(y))))

Dette impliserer ¬(Ay)(yêα → eêξ(y)) og derfor:

(16) (Ey)(yêα & ¬(eê ξ(y))).

Det må derfor finnes y0 der:

(17) y0êα & ¬(e êξ(y0))

Fra (14) og (17) kan man slutte: (18) x0êUN(ξ(y0)). Det må da finnes e1 slik at:

(19) x0ê e1 & e1 ê ξ(y0). Men ξ(y0) Inkl P. Derfor e1êP. Siden eêP ifølge (12) har vi ved hjelp av (12) og (19) at e1 Ω e ≠ø. Siden P er en partisjon må da e1=e. Men fra dette og (17) følger ¬(e1êξ(y0)). Dette strider mot den siste konjunkten i (19). Dette viser at det ikke kan finnes x0 slik at (6) og (7) holder. Det viser riktigheten av inklusjonen mot høyre

i (+).

(B) Vi tar så for oss inklusjonen mot venstre i (+) og viser at den holder. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x0 der

(20) $x0 \hat{e} UN(\Omega/y\hat{e}\alpha/(\xi(y))) \ \& \ \neg (x0\hat{e}\Omega(\alpha))$

Fra den første konjunkten i (20) følger at det finnes noe d der vi har:

(21) $x0\hat{e}d \ \& \ (Ay)(y\hat{e}\alpha \rightarrow d\hat{e}\xi(y))$.

Fra den andre konjunkten i (20) følger:

(22) $\neg(Ay)(y\hat{e}\alpha \rightarrow x0\hat{e}y)$. herav har vi $(Ey)(y\hat{e}\alpha \ \& \ \neg(x0\hat{e}y))$. Det må derfor finns y0 der:

(23) $y0\hat{e}\alpha \ \& \ \neg(x0ey0)$

Fra (21) og den første konjunkten i (23) kan man slutte:

(24) $x0\hat{e}d \ \& \ d\hat{e}\xi(y0)$

Fra (4) og (23) har man: (25) $y0 = UN(\xi(y0))$. Fra dette og den andre konjunkten i (23) følger:

(26) $\neg(x0\hat{e}UN(\xi(y0)))$ og derfor:

(27) $(Ad)(d\hat{e}\xi(y0) \rightarrow \neg(x0\hat{e}d))$

Men fra dette og den siste konjunkten i (24) har vi $\neg(x0\hat{e}d)$ som åpenbart strider mot den første konjunten i (24). Dette viser at det ikke kan eksistere noe x0 som oppfyller betingelsen (20).

Dette viser at også inklusjonen mot venstre i (+) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (ii) i satsen.

Ad (iii): Anta (1) α Inkl U*(P). Er $\alpha=\emptyset$ har vi at $UN(\alpha)= UN(\emptyset) = \emptyset$. Siden $\emptyset$ Inkl P og vi har at $\emptyset=UN(\emptyset)$ følger det at $UN(\alpha)\hat{e}U^*(P)$ i dette tilfellet. Vi har ved hjelp av definisjonen av U*(P) at:

(2) $(Ay)(y\hat{e}\alpha \rightarrow y\hat{e}Pt(X) \ \& \ (Ea)(a \text{ Inkl } P \ \& \ y= UN(a))$. Siden vi kan anta at $\alpha\neq\emptyset$ kan man benytte utvalgsaksiomet og slutte at det finnes en funksjon ξ slik at

(3) $Func(\xi) \ \& \ Dom(\xi) = \alpha \ \& \ (Ay)(y\hat{e}\alpha \rightarrow (\xi(y) \text{ Inkl } P \ \& \ y = UN(\xi(y))))$

Vi definerer q ved $q= UN/y\hat{e}\alpha/(\xi(y))$. Siden det følger fra (3) at $(Ay)(y\hat{e}\alpha \rightarrow \xi(y) \text{ Inkl } P)$ har

vi åpenbart at (4) q Inkl P. Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise at

(5) $UN(\alpha) = UN(UN/y\hat{e}\alpha/(\xi(y)))$ siden $UN(q) = UN(UN/y\hat{e}\alpha/(\xi(y)))$

(a). Vi tar først for oss inklusjonen mot høyre i (5). Anta for vilkårlig x at (6) $x\hat{e}UN(\alpha)$. Da finnes det d slik at:

(7) $x\hat{e}d \ \& \ d\hat{e}\alpha$. Fra (3) og (7) følger: $d = UN(\xi(d))$. Men siden

(8) $U^*(\xi(d)) \text{ Inkl } UN(UN/y\hat{e}\alpha/(\xi(y)))$ har vi at $x\hat{e} UN(UN/y\hat{e}\alpha/(\xi(y)))$. Dette viser at inklusjonen mot høyre holder.

(b). La oss så ta for oss inklusjonen mot venstre. Anta for vilkårlig x at

(9) $x\hat{e}UN(UN/y\hat{e}\alpha/(\xi(y)))$

Da finnes det d slik at (10) $x\hat{e}d \ \& \ d \hat{e} UN/y\hat{e}\alpha/(\xi(y))$. Fra den siste konjunkten her følger i sin tur eksistensen av noe y0 der $d\hat{e}\xi(y0) \ \& \ y0\hat{e}\alpha$. Vi har derfor: (11) $x\hat{e}d \ \& \ d\hat{e}\xi(y0) \ \& \ y0\hat{e}\alpha$. Fra $y0\hat{e}\alpha$ og (3) følger (12) $y0 = UN(\xi(y0))$. Fra den andre konjunkten i (11) har vi

(13) $d \text{ Inkl } UN(\xi(y0))$.

Fra (11), (12) og (13) følger $x\hat{e}y0$. Men dette sammen med det at $y0\hat{e}\alpha$ gir en $x\hat{e}UN(\alpha)$. Dette viser at inklusjonen mot venstre holder og dermed at punkt (iii) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Anta at P er en partisjon av mengden X. Da er Pt(X) mengden av utsagn over X. U*(P), mengden av utsagn bestemt av partisjonen P vil være en delmengde av X. La nå a være et element i Pt(P). Da vil a være en mengde av delmengder av X. Summerer vi sammen disse elementene, dvs. betrakter UN(a), ser man at dette vil være en delmengde av X, altså et utsagn over X. Det vil også være et utsagn i mengden av utsagn bestemt av partisjonen P, det vil si et element i U*(P). Det man nå kan vis er at denne summeringsoperasjonen anvendt på alle elementene i Pt(P) avbilder Pt(P) en-entydig og på U*(P). Videre kan man vise at denne funksjonen er strukturbevarende når det gjelder de Boolske operasjonene over henholdsvis Pt(P) og U*(P). Dette er i det vesentlige innholdet i det følgende teorem:

Teorem 6.4 Anta P er en partisjon av mengden X. Definer h ved:
h= Mg(<x,y>: (Ea)(aêPt(P) & x=a & y= UN(a))
Da har man at følgende holder:
(i) h: Pt(P) : - (1-1,på) → U*(P)
(ii) ø≠α & α Inkl Pt(P) → h(Ω(α)) = Ω/xêα/(h(x))
(iii) xêPt(P) → h(P-x) = X - h(x)

Bevis: *Ad (i)*: (a) Først må det bevises at (1) Func(h), med andre ord at h er en funksjon. Anta derfor for vilkårlige x,y og z at (2) <x,y>,<x,z>êh. Ved hjelp av den definisjonen av som er forutsatt i teoremet har man da at det må finnes a1 og a2 der vi har:
(3) a1êPt(P) & x= a1 & y = UN(a1) og
(4) a2êPt(P) & x= a2 & y = UN(a2)
Fra (3) og (4) følger a1 = x= a2 og derfor y= UN(a1) = UN(a2)=z. Dette viser tydeligvis at (1) holder.

(b) Det er også nødvendig å vise at h er en-entydig. Anta derfor (5) <y,x>,<z,x>êh for vilkårlige x,y og z. Ved hjelp av definisjonen av h kan man da slutte at det finnes a1 og a2 slik at følgende tre ting holder:
(6.1) a1,a2êPt(P)
(6) y = a1 & x= UN(a1)
(7) z= a2 & x = UN(a2)
Fra (6) og (7) følger åpenbart at (8) UN(a1) = UN(a2). Anta for reduktio ad absurdum at a1 ≠ a2. Da ville det finnes noe xêP slik at enten (9) xêa1 & ¬(xêa2) eller ¬(xêa1) & xê a2. Vi ser bare på det første tilfellet siden det andre tilfellet behandles på nøyaktig samme måte. Siden xêa1 følger i lys av (8) at (10) x Inkl UN(a1)=UN(a2). Men siden ¬(xêa2) har vi at
(11) xΩUN(a2) =ø. For hadde det eksistert noe r slik at (12) rêx & rêUN(a2) ville det også ha eksistert q slik at(13) rêx & rêq & qêa2. Men siden a1, a2 Inkl P ville vi da ha at x,qêP, og siden P er en partisjon av X, ville det i så tilfelle ha vært slik at x=q. Men i lys av (13) ville vi da hatt at xêa2 som strider mot (9). Det følger at (11) holder. Siden xêP har vi, siden P er en partisjon av X, at x≠ø. Da finnes det noe r slik at rêx. Ved hjelp av (10) har vi da at xΩUN(a2) ≠ø. Dette strider mot (11). Det følger at det er umulig at a1≠a2. Vi må derfor ha a1=a2. I lys av (6) og (7) følger at
y=z. Dette viser en-entydigheten til funksjonen h.

(c) Det skulle være nokså åpenbart at (13) Dom(h) = Pt(P). Anta for vilkårlig x at xêDom(h). da finnes det y slik at <x,y>êh. Fra dette og definisjonen av h følger eksistensen av a der aêPt(P) & x=a & y=UN(a). Da er det klart at xêPt(P). Dette viser inklusjonen mot høyre i (13).

Anta xêPt(P). Da har vi åpenbart på basis av definisjonen av h at <x,UN(x)>êh. det følger i så fall at (Ey)(<x,y>êh). Fra dette kan man slutte at yêDom(h). Vi har nå vist at (13) holder.

(d) Det er også nødvendig å vise at (14) Rgn(h) Inkl U*(P). Anta for vilkårlig x at at xêRgn(h). Da har vi at det finnes y slik at <y,x>êh. I lys av definisjonen av h må det da finnes a slik at y=a & x=UN(a) & aêPt(P) Siden P er en partisjon av X har vi UN(a) Inkl X og derfor at x=UN(a)êPt(X). Vi har også (Ea)(a Inkl P & x=UN(a)). Det følger at xêU*(P).

(e) Endelig må vi også vise at h er på U*(P). Anta yêU*(P) for vilkårlig x. Da følger ved hjelp av definisjonen av U*(P) at det finnes a der vi har a Inkl P & y= UN(a). Dessuten har vi yêPt(X). Setter vi per definisjon x =a har vi da ved hjelp av definisjonen av h at <x,y>êh og derfor at (Ex)(<x,y>êh). Dette impliserer at yêRgn(h).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for det første punktet i satsen.

Ad (ii): Anta (1) ø≠α Inkl Pt(P). Vi må bevise (2) h(Ω(α)) = Ω/xêα/(h(x)). I lys av definisjonen av h har man at h(Ω(α)) = UN(Ω(α)) og at Ω/xêα/(h(x)) = Ω/yêα/(UN(y)). Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise: (3) UN(Ω(α)) = Ω/yêα/(UN(y)).

(A) Vi beviser først inklusjonen mot høyre i (3): Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes x der (4) xêUN(Ω(α)) & ¬(xêΩ/yêα/(UN(y))). Fra den siste konjunkten i (4) følger
¬(Ay)(yêα → xêUN(y)). Herav har man: (Ey)(yêα & ¬(xêUN(y))). Det må derfor finnes noe d der: (5) dêα & ¬(xêUN(d)). Fra den første konjunkten i (4) har vi at det finnes y0 slik at:

(6) xêy0 & (Aa)(aêα → y0êa). Fra den andre konjunkten i (5) følger:
¬(Ez)(xêz & zêd). Herav har man: (7) (Az)(zêd → ¬(xêz)). Fra (5) og (6) følger
(8) y0êd. Fra dette og (7) følger i sin tur: ¬(xêy0). Men dette strider mot den første konjunkten i (6). Det følger at det ikke kan finnes noe x slik at (4) holder. Fra dette kan man konkludere med at inklusjonen mot høyre i (4) holder.

(B) Vi beviser så inklusjonen mot venstre i (3). Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x slik at (9) xêΩ/yêα/(UN(y)) & ¬(xêUN(Ω(α))). Fra den første konjunkten i (9) har vi
(10) (Ay)(yêα → xêUN(y)). Vi må ha at (10.1) xêX. Begrunnelsen er denne: Siden α≠ø følger det at det finnes p slik at pêα. Dette innebærer siden α Inkl Pt(P) at p Inkl P. Videre har vi ved hjelp av (10) at xêUN(p). Men siden P er en partisjon av X har vi per definisjon at UN(P) = X. Det følger at xêUN(p) Inkl UN(P)=X siden p Inkl P. Dette viser at (10.1) holder. Fra (10.1) har vi siden P er en partisjon av X at det finnes d0 slik at (10.2) xêd0 & d0êP. Fra den andre konjunkten i (9) følger: ¬(Ed)(dêΩ(α) & xêd). Herav: (11) (Ad)(xêd → ¬(dêΩ(α))). Fra (10.2) og (11) kan man slutte: (12) ¬(d0êΩ(α)). Dette impliserer eksistensen av y0 der (13) y0êα & ¬(d0êy0). Fra (10) og (13) følger: (14) xêUN(y0), og derfor at det finnes d1 slik at (15) xêd1 & d1êy0. Fra (10.2) og (15) følger (16) xêd1 & xêd0. Nå er d0êP. Men vi må også ha at d1êP. For vi har
y0êα Inkl Pt(P). Da følger det at y0 Inkl P og siden d1êy0 følger d1êP. Fra (16) følger: d1Ωd0≠ø. Siden d1,d0êP og P er en partisjon av X må vi derfor per definisjon ha at d1=d0. Men fra (13) og (15) har vi ¬(d0êy0) & d1êy0. Dette gir oss en motsigelse siden d1=d0. Det kan altså ikke finnes noe x slik at (9) holder. Dermed har vi også vist at inklusjonen mot venstre i (3) holder og følgelig gitt et fullstendig bevis for punkt (ii) i teoremet.

Ad (iii): Anta (1) xêPt(P). Vi må da bevise at h(P - x) = X - h(x). I lys av definisjonen av h har vi at h(P-x) = UN(P-x). Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise:

(2) UN(P-x) = X -h(x). Siden h(x) = UN(x) er det i sin tur tilstrekkelig å vise

riktigheten av : (3) UN(P-x) = X - UN(x).

(A) Vi tar først for oss inklusjonen mot venstre. Anta for reduktio at absurdum at det finnes noe z der (4) zê(X-UN(x)) & ¬(zêUN(P-x)). Fra den første konjunkten i (4) følger
(5) zêX & (Ay)(yêx → ¬(zêy)). Siden zêX og P er en partisjon av X må det, i lys av den definisjonen vi har gitt av 'partisjon', finnes en d slik at (6) zêd & dêP. Fra dn andre konjunkten i (4) følger: (Ay)(yê(P-x) → ¬(zêy)). Herav: (Ay)(yêP &(¬(yêx)) → ¬(zêy)). Fra dette følger i sin tur: (7) (Ay)(yêP & zêy → yêx). Fra (6) og (7) kan man slutte: (8) dêx. Fra dette og den siste konjunkten i (5) følger ¬(zêd). Dette strider åpenbart mot (6). Dette viser at det ikke kan finnes z som oppfyller kravet (4). Det følger at inklusjonen mot venstre i (3) holder.

(B) Vi tar så for oss inklusjonen mot høyre i (3). Anta for reduktio ad absurdum at det finnes z der (9) zêUN(P-x) og (10) ¬(zê(X-UN(x))). Fra (9) følger eksistensen av y der vi har:
(11) zêy & yêP & ¬(yêx). Fra (10) følger (12) zêX → zêUN(x). Siden zêUN(P-x) Inkl UN(P) =X følger ved hjelp av (12) at zêUN(x). Det må derfor finnes noe d slik at (13) zêd & dêx. Siden x Inkl P ifølge (1) har vi dêP. Vi har derfor zêy & zêd, og derfor
yΩd ≠ø. Siden d,yêP og P er en partisjon av X følger y=d. Men fra dette og (13) følger yêx. Dette strider mot den siste konjunkten i (11). Det følger at det ikke kan finnes z slik at både (9) og (10) holder. Dette viser inklusjonen mot høyre i (3) og avslutter dermed vårt bevis for punkt (iii).

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem 6.5 Anta P er en partisjon av mengden X. Definer g ved:
g = Mg(<x,y>: xêPt(X) & y Inkl P & x= UN(y))
Da har man at :
g: U*(P) - (1-1,på) → Pt(P)

Bevis: *(a)* Vi beviser først at g er en funksjon, ie. (1) Func(g). Anta derfor for vilkårlige x,y og z at (2) <x,y>, <x,z> êg. Fra definisjonen av g som er gitt i teoremet følger da :
(3) xêPt(X) & y Inkl P & x=UN(y)
(4) xêPt(X) & z Inkl P & x = UN(z)
Fra dette følger at (5) UN(y) = UN(z). Vi må vise at y=z. Anta for reduktio ad absurdum at (6) ¬(y=z). Da må det finnes r slik at enten (7) rêy & ¬(rêz) eller (7.1) ¬(rêy) & rêz. Vi ser bare på det første av disse to tilfellene siden det andre kan behandles på akkurat samme måte. Siden rêy har vi r Inkl UN(y)= UN(z). Anta rΩUN(z)≠ø. Da finnes det noe p slik at pêr & pêUN(z). Dette impliserer eksistensen av v der: (8) pêr & pêv & vêz. Siden z Inkl P i lys av (4), må vi ha at vêP. Siden rêy Inkl P har vi derfor v,rêP. Fra (8) fremgår det at rΩv≠ø. Siden P er en partisjon av x kan vi derfor slutte at r=v. Men fra dette og (8) følger rêz som strider mot den andre konjunkten i (7). Det følger at rΩUN(z)=ø. Men dette og det at pêr & r Inkl UN(z) gir oss åpenbart en motsigelse. Det følger at (7) er umulig. På samme måte viser man at (7.1) er umulig. Det følger derfor at y=z og at g er en funksjon.

(b) Det er nødvendig å vise at g er en-entydig. Anta derfor for vilkårlige x,y og z at
(1) <y,x>,<z,x>êg. Ved hjelp av definisjonen av g følger da at
(2) yêPt(X) & x Inkl P & y =UN(x) og
(3) zêPt(X) & x Inkl P & z =UN(x). Det følger umiddelbart fra (2) og (3) at y=z.

Sammen med resultatet som ble vist under forrige punkt kan man fra dette slutte at g er en en-entydig funksjon.

(c) Det er nødvendig å vise at Dom(g) = U*(P). Anta <x,y>êg for noe y. I lys av definisjonen av g følger da at xêPt(X) & y Inkl P & x=UN(y). Fra dette følger umiddelbart at (Ey)(y Inkl P & x = UN(y)) og derfor ved hjelp av definisjonen av U*(P) at xêU*(P).

Anta på den annen side at xêU*(P) for vilkårlig x. Da har vi ved hjelp av definisjonen av U*(P) at (Ea)(a Inkl P & x=UN(a)). Fra dette følger a Inkl P & x=UN(a) & xêPt(X) for noe a. Fra definisjonen av g har vi da <x,a>êg og følgelig at xêDom(g).

(d) Endelig må vi vise at Rgn(g) = Pt(P). Anta <x,y>êg for noe x. Ved hjelp av definisjonen av g har vi da xêPt(X) & y Inkl P & x = UN(y). Fra dette følger trivielt at yêPt(P). Anta på den annen side at yêPt(P). Det følger at y Inkl P. Det må også finnes noe x slik at
x = UN(y). Vi vise at xêPt(X). Anta derfor for vilkårlig r at rêx. Da har vi, siden x=UN(y) at rêUN(y) og følgelig at dt finnes p der rêp & pêy. Siden y Inkl P følger pêP og derfor p Inkl UN(P) =X, siden P er en partisjon av X. Siden rêp har vi derfor rêX. Siden r var vilkårlig følger at x Inkl X og derfor xêPt(X). Vi konkluderer med at <x,y>êg og derfor at yêRgn(g)

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem 6.6 La h og g være definert som i de foregående teoremer.

(a) Anta xêU*(P) og at P er en partisjon av mengden x. Da har vi:
$h(g(x)) = x$

(b) Anta P er en partisjon av X og at xêPt(P). Da har man:
$g(h(x)) = x$

Bevis: *Ad (a)*: Anta xêUP). Da har man (1) g(x) = (ia)(a Inkl P & x=UN(a)). Definer b ved:
(2) b = (ia)(a Inkl P & x=UN(a)). Da følger fra (1) og (2) at (3) g(x) =b. Fra (2) følger: (4) x=UN(b). Ved hjelp av (3) og (4) samt definisjonen av h har man så:
h(g(x)) = h(b) =UN(b) = x. Dette viser at det første punktet i satsen holder.

Ad (b): Anta P er en partisjon av X og at xêPt(P). Da har vi i lys av definsjonen av g at
(5) g(h(x)) = (ia)(a Inkl P & h(x) = UN(a)). Vi har at det må finnes noe y slik at
(6) y = (ia)(a Inkl P & h(x) = UN(a)). Fra dette følger (7) h(x) = UN(y). Dette i sin tur innebærer at (8) UN(x) = UN(y) Siden x Inkl P og y Inkl P, dette siste følger fra (6) kan man vise på samme måte som i Teorem 6.4 at x=y. Men g(h(x))=y. Det følger at g(h(x)) = x.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Teorem 6.7 Anta P er en partisjon av mengden X. Definer for hvert xêU*(P) funksjonen g ved:

g(x) = (ia)(a Inkl P & x= UN(a)).

Da har vi:

(i) g: U*(P) - (1-1,på) → Pt(P)

(ii) Er ø≠ α & α Inkl U*(P) → g(Ω(α)) = Ω/xêα/(g(x))

(iii) Er aêU*(P) → g(X-a) = P- g(a)

Bevis: Ad (i): Dette er bevist i og med at vi har gitt et bevis for Teorem 6.5.

Ad (ii): Anta (1) ≠α Inkl U*(P) og selvfølgelig at de øvrige forutsetningene i satsen er

oppfylt. Vi må vise at (+) $g(\Omega(\alpha)) = \Omega/x\hat{e}\alpha/(g(x))$.

Siden g avbilder U*(P) en-en tydig og på Pt(P) har vi at (2) $g''\alpha$ Inkl Pt(P), og siden $\alpha \neq \emptyset$ har vi også at (3) $g''\alpha \neq \emptyset$. Ved hjelp av Teorem 6.4 kan vi da slutte at

(4) $h(\Omega(g''\alpha)) = \Omega/x\hat{e}g''\alpha/(h(x))$

Vi skal nå vise riktigheten av de følgende to påstander:

(5) $\Omega(\alpha) = \Omega/x\hat{e}g''\alpha/(h(x))$ og

(6) $\Omega(g''\alpha) = \Omega/z\hat{e}\alpha/(g(z))$

Det vil være tilstrekkelig å bevise (5) og (6), for ved hjelp av (4) - (6) har vi

$g(\Omega(\alpha)) = g(\Omega/x\hat{e}g''\alpha/(h(x)))$ (jmf. (5))

$= g(h(\Omega(g''\alpha))$ (Jmf. (4))

$= \Omega(g''\alpha)$ (Jmf. Teorem 6.6)

$= \Omega/x\hat{e}\alpha/(g(x))$ (Jmf. (6))

(A) Vi gir først bevis for (5):

Vi har om x er et vilkårlig objekt at følgende

(7) $x\hat{e}\Omega/x\hat{e}g''\alpha/(h(x))$ holder hvis og bare hvis:

(8) $(Az)(z\hat{e}g''\alpha \rightarrow x\hat{e}h(z))$. Dette i sin tur holder hvis og bare hvis:

(9) $(Az)((Ey)(y\hat{e}\alpha \,\&\, z=g(y)) \rightarrow x\hat{e}h(z))$

(9) er åpenbart ekvivalent med:

(10) $(Az)(Ay)(y\hat{e}\alpha \,\&\, z=g(y) \rightarrow x\hat{e}h(z))$. Dette er så ekvivalent med:

(11) $(Ay)(y\hat{e}\alpha \rightarrow (Az)(z=g(y) \rightarrow x\hat{e}h(z)))$ Nå holder dette hvis og bare hvis:

(12) $(Ay)(y\hat{e}\alpha \rightarrow x\hat{e}h(g(y)))$.

Ved hjelp av det foregående teorem ser man endelig at dette siste er ekvivalent med:

(13) $(Ay)(y\hat{e}\alpha \rightarrow x\hat{e}y)$ som åpenbart sier det samme som: (14) $x\hat{e}\Omega(\alpha)$.

Dette viser at (5) holder.

(B) Vi gir så et bevis for riktigheten av (6): Anta x er et eller annet vilkårlig objekt. Da har man at

(15) $x\hat{e}\Omega(g''\alpha)$ hvis og bare hvis

(16) $(Ay)(y\hat{e}g''\alpha \rightarrow x\hat{e}y)$. Dette er ekvivalent med:

(17) $(Ay)((Ez)(z\hat{e}\alpha \,\&\, y=g(z)) \rightarrow x\hat{e}y)$. Dette er i sin tur ekvivalent med:

(18) $(Ay)(Az)(z\hat{e}\alpha \,\&\, y = g(z) \rightarrow x\hat{e}y)$ som innebærer nøyaktig det samme som:

(19) $(Az)(z\hat{e}\alpha \rightarrow (Ay)(y=g(z) \rightarrow x\hat{e}y))$

man ser at (19) holder hvis og bare hvis:

(20) $(Az)(z\hat{e}\alpha \rightarrow x\hat{e}g(z))$

Dette er så ekvivalent med $x\hat{e}\Omega/x\hat{e}\alpha/(g(z))$. Dette viser at (6) holder.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for punkt (ii) i satsen.

Ad (iii): Anta (1) $a\hat{e}Pt(P)$. Siden g avbilder U*(P) en-entydig og på Pt(P) har vi at (2) $g(a)\hat{e}Pt(P)$. Fra (2) og det tredje punktet i Teorem 6.4 har vi da:

(3) $h(P\text{-}g(a)) = X - h(g(a))$

Siden $a\hat{e}U^*(P)$, følger ved hjelp av foregående teorem: (4) $h(g(a)) = a$. Siden $P - g(a)$ Inkl P har vi:

$g(X\text{-}h(g(a)) = g(X-a) = g(h(P- g(a))) = P- g(a)$ i lys av Teorem 6.6

Det følger at $g(X-a) = P- g(a)$. Som er det vi ønsker.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

§7 Noen avsluttende bemerkninger

Fra det vi har skrevet ser man at en ekvivalensrelasjon over en mengde X gir opphav til et system av ekvivalensmengder over X som utgjør det vi har omtalt som en partisjon av X. Omvendt vil man på basis av en partisjon av X kunne definere en ekvivalensrelasjon over X hvor systemet av ekvivalensmengder som er bestemt av ekvivalensrelasjonen er identisk med partisjonen. Vi har utførlig omtalt disse, og relaterte, forhold i de første avsnittene i dette skrift.

Summerer man på alle mulig måter elementene i en partisjon av mengden X får man en delmengde av potensmengden til X. Vi kaller denne mengden av mengder for utsagnsmengden bestemt av partisjonen. Tilsvarende vil en ekvivalensrelasjon over en mengde X bestemme en partisjon av X og dermed en helt fiksert utsagnsmengde, nemlig utsagnsmengden bestemt av ekvivalensrelasjonen. Et viktig resultat, blandt dem vi har kommet frem til, er at dersom en ekvivalensrelasjon R er strengt inkludert i en ekvivalensrelasjon R' har man at utsagnsmengden bestemt av R' er strengt inkludert i utsagnsmengden bestemt av R. I §5 viste vi også en rekke andre resultater som er beslektet med denne sats.

Er P en partisjon av X kan man betrakte den naturlige boolske algebraen over P, det vil si strukturen S= <Pt(P), Ω, c>, der Pt(P) er potensmengden til P, Ω den uendelige snittoperasjonen over P og c er den operasjonen som tilordner enhver mengde i Pt(P) dens komplement med hensyn på P. Tilsvarende kan man betrakte strukturen S' = <U(P), Ω', c'>, der U(P) er mengden av utsagn bestemt av P og Ω', c' er henholdsvis snitt- og komplementeringsoperasjonene over U(P). De siste satsene vi beviste viser at disse to strukturene er isomorfe.

Referanser

Rognes [1] Rognes, Morten Harboe, 2008, *Tilstandsstrukturer og insidens*, Upublisert manuskript.